Magister Universitas Érettségi Előkészítő

Matematika Szekció

Egy valószínűségi feladat

A pozitív egészek közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott három számból (mint oldalhosszúságból) háromszög szerkeszthető?

Ebben a dokumentumban a fenti feladat megoldását mutatjuk be, körbejárva néhány olyan kérdést is, ami e feladattal kapcsolatban felmerült. A feladatot a 2016/17-es tanévében az egyik diákunk, Molnár Áron vetette föl és az *emelet matek plusz* előkészítőn közösen dolgoztuk ki az itt bemutatandó megoldást.

Budapest, 2017.

1. Megoldási stratégia

Írjuk le 1-től N-ig a pozitív egészeket. Ezekből három különbözőt $\binom{N}{3}$ módon választhatunk ki. Ezekből a hármasokból válasszuk ki azokat, amelyekből háromszög szerkeszthető: jelölje ezek számát $K(N)$. Nyilván ekkor a

$$p(N) := \frac{K(N)}{\binom{N}{3}} \tag{1}$$

arány adja a keresett valószínűséget abban az esetben, ha a pozitív egész számokat 1 és N között választjuk. Kérdésünk a $\lim\limits_{N\to\infty} p(N)$ határérték értéke. Ehhez nyilván meg kell határozni $K(N)$-t. Az alábbiakban elsőként $K(N)$-re előállítunk két rekurzív alakot is (egy elsőrendűt és egy másodrendűt), majd a másodrendű alakot expliciten is megadjuk, és az explicit alakból kiszámoljuk a határértéket.

2. $K(N)$ rekurzív előállítása

A rekurzív előállítás alapját az alábbi segédtétel adja:

2.1. Lemma. *Legyenek a, b, c pozitív számok és $a \le b \le c$. Ekkor szerkeszthető a, b, c oldalú háromszög akkor és csak akkor, ha $a + b > c$.*

Bizonyítás. Legyenek a, b, c pozitív számok és $a \le b \le c$. A háromszög egyenlőtlenségből tudjuk, hogy a, b, c oldalú háromszög akkor és csak akkor szerkeszthető, ha bármely két oldal összege nagyobb a harmadiknál.

Így ha a, b, c olyan, hogy azokból háromszög szerkeszthető, akkor $a + b > c$. Megfordítva: az $0 < a \le b \le c$ miatt $a + c > b$ és $b + c > a$, így ha $a + b > c$ is teljesül, akkor bármely két oldal összege nagyobb a harmadiknál, vagyis az a, b, c számokból háromszög szerkeszthető. ***q.e.d.***

Következmény. Legyen $N \ge 3$. Rögzítsük, hogy *a kiválasztott hármasokban a számokat növekvő sorrendben írjuk le* (kombinációkban gondolkozunk, így a sorrend lehet növekvő). *Egy kiválasztott hármasból tehát csakis akkor szerkeszthető háromszög, ha az első kettő összege nagyobb, mint a harmadik.*

Az elsőrendű rekurziós alak. Ha $N = 3$, akkor az $1, 2, 3$ számokból három különbözőt csak egyféleképpen választhatunk ki, és ekkor $1 + 2 = 3$ miatt nem szerkeszthető háromszög, vagyis $K(3) = 0$. Ha $N = 4$, akkor az $1, 2, 3, 4$ számokból csak az $2, 3, 4$ hármas lesz olyan, hogy az első kettő összege nagyobb, mint a harmadik, vagyis $K(4) = 1$. Innentől rekurzív alakot keresünk. Meghatározandó az a $T(N)$ érték, amelyre tetszőleges $N \ge 3$ egész esetén

$$K(N + 1) = K(N) + T(N) \tag{2}$$

2.1. Állítás. *Legyen $N \geq 3$ egész. Ekkor*

$$T(N) = \begin{cases} \frac{N(N-2)}{4} & \textit{ha } N \textit{ páros} \\ \frac{(N-1)^2}{4} & \textit{ha } N \textit{ páratlan} \end{cases} \tag{3}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $K(N)$-t már ismerjük. $K(N+1)$ meghatározásához csak azon hármasok számát kell $K(N)$-hez hozzáadni, amelyek harmadik eleme $N+1$. Úgy kell tehát összeválogatnunk az első két elemet az első N pozitív egészből ismétlés nélkül, növekvő sorrendben, hogy azok összege nagyobb legyen, mint $N+1$. Összesen tehát $\binom{N}{2}$ esetből kell válogatnunk.

Hogyan ábrázolhatjuk az összes esetet? Képzeljünk el egy $N \times N$-es táblázatot egy négyzetrácsos lapon, amiben a sorok és az oszlopok is 1-től N-ig számozottak. E táblázatban N^2 darab négyzet szerepel. A táblázatból húzzuk ki a főátlót (vagyis azokat a négyzeteket, amelyeknek a sorszáma és az oszlopszáma megegyezik), így marad $N^2 - N$ darab négyzet. A főátló két részre osztja szét a táblázatot: a főátló fölötti négyzetek és a főátló alatti négyzetek. E két részből tartsuk meg csak a főátló fölötti négyzeteket (tehát azokat, ahol a sorszám kisebb, mint az oszlopszám), így meg is van a keresett összes $\frac{N^2-N}{2} = \binom{N}{2}$ eset. Tegyünk abba a négyzetbe pipát, amelynek a sorszáma + oszlopszáma nagyobb, mint $N+1$. A pipák száma éppen $T(N)$-t adja, hiszen amely négyzetben pipa van, annak a négyzetnek a sorszáma (x) és oszlopszáma (y) szerepelhet a hármasban az $N+1$ előtt. A hármasok alakja így $(x, y, N+1)$. Példák:

$N = 3$ *és* $N + 1 = 4$

	1	2	3
1	$\times$		
2		$\times$	✓
3			$\times$

$T(3) = 1$

$N = 4$ *és* $N + 1 = 5$

	1	2	3	4
1	$\times$			
2		$\times$		✓
3			$\times$	✓
4				$\times$

$T(4) = 2$

$N = 5$ *és* $N + 1 = 6$

	1	2	3	4	5
1	$\times$				
2		$\times$			✓
3			$\times$	✓	✓
4				$\times$	✓
5					$\times$

$T(5) = 1 + 3$

$N = 6$ *és* $N + 1 = 7$

	1	2	3	4	5	6
1	$\times$					
2		$\times$				✓
3			$\times$		✓	✓
4				$\times$	✓	✓
5					$\times$	✓
6						$\times$

$T(6) = 2 + 4$

$N = 7$ *és* $N + 1 = 8$

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\times$						
2		$\times$					✓
3			$\times$			✓	✓
4				$\times$	✓	✓	✓
5					$\times$	✓	✓
6						$\times$	✓
7							$\times$

$T(7) = 1 + 3 + 5$

$N = 8$ *és* $N + 1 = 9$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\times$							
2		$\times$						✓
3			$\times$				✓	✓
4				$\times$		✓	✓	✓
5					$\times$	✓	✓	✓
6						$\times$	✓	✓
7							$\times$	✓
8								$\times$

$T(8) = 2 + 4 + 6$

Általánosítsuk a tapasztalatokat. (a) Az N-edik oszlopban $N-2$ pipa található, ugyanis az $(x, N, N+1)$ alakú hármasokban az x helyén a $2, 3, \ldots, N-1$ számok lehetnek, ami $N-2$ eset. (b) A pipák száma jobbról-balra lépkedve oszloponként kettővel csökken, ugyanis ha balra lépek egyet, akkor az oszlopszám eggyel csökken, így az x helyére írható legkisebb sorszám eggyel nő (a sorszám + oszlopszám így marad $N+1$ fölött), a legnagyobb sorszám pedig eggyel csökken (így maradunk a főátló fölött). Így (a) és (b) miatt

$$T(N) = \begin{cases} 2 + 4 + 6 + \cdots + (N-2) & \textit{ha } N \textit{ páros} \\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (N-2) & \textit{ha } N \textit{ páratlan} \end{cases}$$

Páros esetben egy számtani sorozat első $(N-2)/2$ tagjának összegét, páratlan esetben egy számtani sorozat első $(N-1)/2$ tagjának összegét kell meghatározni, így az összegformula alkalmazásával adódik az állítás. ***q.e.d.***

A másodrendű rekurziós alak. Azt már tudjuk, hogy $K(3) = 0$ és $K(4) = 1$. Ezen kezdőértékek mellett

2.2. Állítás. *Tetszőleges $N \geq 3$ pozitív egész esetén*

$$K(N+2) = K(N) + \binom{N}{2} \tag{4}$$

Bizonyítás. Legyen $N \geq 3$ pozitív egész. Az elsőrendű rekurzió kétszeri alkalmazásával:

$$K(N+2) = K(N+1) + T(N+1) = K(N) + T(N) + T(N+1)$$

Ha N páros, akkor az előző állítás alapján (kihasználva, hogy $N+1$ páratlan)

$$T(N) + T(N+1) = \frac{N(N-2)}{4} + \frac{N^2}{4} = \frac{2N^2 - 2N}{4} = \frac{N(N-1)}{2} = \binom{N}{2}$$

Ha N páratlan, akkor az előző állítás alapján (kihasználva, hogy $N+1$ páros)

$$T(N)+T(N+1) = \frac{(N-1)^2}{4} + \frac{(N+1)(N-1)}{4} = \frac{N^2 - 2N + 1 + N^2 - 1}{4} = \frac{N(N-1)}{2} = \binom{N}{2}$$

q.e.d.

3. $K(N)$ explicit alakja

Rögzítsük, hogy $\binom{n}{k} = 0$, ha $n < k$. Ez jogos, hiszen $\binom{n}{k}$ az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli. Alkalmazzuk a másodrendű rekurziós alakot:

páros eset ($k \geq 1$)	*páratlan eset* ($k \geq 1$)
$K(4) = 1 = \binom{2}{2}$	$K(3) = 0 = \binom{1}{2}$
$K(6) = K(4) + \binom{4}{2} = \binom{2}{2} + \binom{4}{2}$	$K(5) = K(3) + \binom{3}{2} = \binom{1}{2} + \binom{3}{2}$
$K(8) = K(6) + \binom{6}{2} = \binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2}$	$K(7) = K(5) + \binom{5}{2} = \binom{1}{2} + \binom{3}{2} + \binom{5}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$K(2k+2) = \binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \dots \binom{2k}{2}$	$K(2k+1) = \binom{1}{2} + \binom{3}{2} + \binom{5}{2} + \dots \binom{2k-1}{2}$

3.1. Állítás. *Legyen k tetszőleges pozitív egész. Ekkor*

$$K(2k+1) = \frac{k(k-1)(4k+1)}{6} \qquad \text{és} \qquad K(2k+2) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} \tag{5}$$

Bizonyítás. Nyilván ezeket a formulákat a másodrendű rekurziós alakból könnyen lehetne teljes indukcióval bizonyítani. A teljes indukciós bizonyítás azonban nem világít rá arra, hogy hogyan találtuk meg ezeket a formulákat. Így a formulák „felfedezését” mutatjuk inkább be. Felhasználjuk a páratlan számok és a négyzetszámok összegeinek alábbi ismert formuláit:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Kezdjük elsőként a páros eset vizsgálatával. Felhasználva, hogy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$$K(2k+2) = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + \frac{6\cdot 5}{2} + \dots \frac{2k\cdot(2k-1)}{2} = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 + \dots k\cdot(2k-1)$$

vagyis az összeg tartalmaz 1 darab 1-est, 2 darab 3-ast, 3 darab 5-öst, $\dots k$ darab $(2k-1)$-est. Helyezzük el ezeket egy $k \times k$-s négyzetrácsos lapon. Feketével írjuk azokat a számokat, amik benne vannak az összegben, és pirossal azokat, amik nincsenek benne, de az összegformula meghatározásához szükségesek.

1	1	1	1	$\dots$	1	1
3	3	3	3	$\dots$	3	3
5	5	5	5	$\dots$	5	5
7	7	7	7	$\dots$	7	7
			$\vdots$			
$2k-3$	$2k-3$	$2k-3$	$2k-3$	$\dots$	$2k-3$	$2k-3$
$2k-1$	$2k-1$	$2k-1$	$2k-1$	$\dots$	$2k-1$	$2k-1$
k^2	k^2-1^2	k^2-2^2	k^2-3^2	$\dots$	$k^2-(k-2)^2$	$k^2-(k-1)^2$

Az alsó sorban a dupla vonal alatt az oszlop elemeinek összege látható. Az első k páratlan szám összege ugyanis k^2, de ebből le kell vonni a piros páratlan számok összegét (amit szintén meghatározhatunk az első n páratlan szám összegével). A dupla vonal alatt lévő számok összege adja $K(2k+2)$ értékét:

$$K(2k+2) = k\cdot k^2 - \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-2)^2 + (k-1)^2\right] = k^3 - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}$$

Ez pedig némi átalakítással az állításban szereplő formulához vezet.

Nézzük most a páratlan esetet. Az eljárás ugyanaz:

$$K(2k+1) = \frac{0\cdot 1}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{4\cdot 5}{2} + \dots \frac{(2k-2)\cdot(2k-1)}{2} = 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 5 + \dots (k-1)\cdot(2k-1)$$

vagyis az összeg tartalmaz 0 darab 1-est, 1 darab 3-ast, 2 darab 5-öst, $\dots k-1$ darab $(2k-1)$-est.

Helyezzük el ezeket is egy $k \times k$-s négyzetrácsos lapon (ugyanúgy a két színt használva, mint az előbb):

1	1	1	1	$\dots$	1	1
3	3	3	3	$\dots$	3	3
5	5	5	5	$\dots$	5	5
7	7	7	7	$\dots$	7	7
			$\vdots$			
$2k-3$	$2k-3$	$2k-3$	$2k-3$	$\dots$	$2k-3$	$2k-3$
$2k-1$	$2k-1$	$2k-1$	$2k-1$	$\dots$	$2k-1$	$2k-1$
k^2-1^2	k^2-2^2	k^2-3^2	k^2-4^2	$\dots$	$k^2-(k-1)^2$	k^2-k^2

A dupla vonal alatt az oszlopokban lévő elemek összege látható. Ezek összege adja $K(2k+1)$ értékét:

$$K(2k+1) = k\cdot k^2 - \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2\right] = k^3 - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ez pedig némi átalakítással az állításban szereplő formulához vezet. ***q.e.d.***

4. $p(N)$ és a határérték meghatározása

Induljunk ki abból, hogy

$$\binom{N}{3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$$

Így az előző állítás alapján

$$p(2k+1) = \frac{K(2k+1)}{\binom{2k+1}{3}} = \frac{k(k-1)(4k+1)}{(2k+1)2k(2k-1)} = \frac{4k^2-3k-1}{8k^2-2} \tag{6}$$

és ugyanígy a páros esetekre is

$$p(2k+2) = \frac{K(2k+2)}{\binom{2k+2}{3}} = \frac{k(k+1)(4k-1)}{(2k+2)(2k+1)2k} = \frac{4k-1}{8k+4} \tag{7}$$

Ezekből látható, hogy

$$\lim_{k\to\infty} p(2k+1) = \frac{1}{2} \qquad \textit{és} \qquad \lim_{k\to\infty} p(2k+2) = \frac{1}{2} \tag{8}$$

A $p(N)$ sorozat páratlan indexű tagjait adja a $p(2k+1)$ sorozat és páros indexű tagjait adja a $p(2k+2)$ sorozat, így a két utóbbi sorozat összefésülése adja a $p(N)$ sorozatot. Mivel a $p(2k+1)$ sorozat is 1/2-hez tart és a $p(2k+2)$ sorozat is 1/2-hez tart, ezért az összefésült $p(N)$ sorozat is 1/2-hez tart.